

الأوائل في الرياضيات

الفصل الدارسى الثانى

قوانين المنهج

إعداد
خبير الرياضيات

أشرف ذكي

01005156735

الجبر

بعض أنواع المصفوفات الخاصة

① مصفوفة الصف : هي مصفوفة تحتوي علي صف واحد وأي عدد من الأعمدة

مثل أ = (٣ ٢ ٤) مصفوفة على النظم ١ × ٣

كذلك س = (٧ ٦) مصفوفة على النظم ١ × ٢

② مصفوفة العمود : هي مصفوفة تحتوي علي عمود واحد وأي عدد من الصفوف

مثل ص = $\begin{pmatrix} ٣ \\ -١ \\ ٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة على النظم ٣ × ١

③ المصفوفة المربعة : هي مصفوفة فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة

مثل أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{pmatrix}$ النظم ٢×٢ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ -١ & ٤ & ١ \\ ٦ & ٨ & ٧ \end{pmatrix}$ النظم ٣×٣

④ المصفوفة الصفرية : هي مصفوفة عناصرا كلها أصفار رمزها ▭

مثل $▭_{٢×٢}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٢

مثل $▭_{٢×٣}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة صفرية على النظم ٢ × ٣

⑤ المصفوفة القطرية : هي مصفوفة مربعة عناصرها أصفار عدا عناصر قطرها الرئيسي أحدهما علي الأقل لا يساوي صفر

⑥ مصفوفة الوحدة : هي مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي تساوي واحد وباقي العناصر أصفار ورمزها I

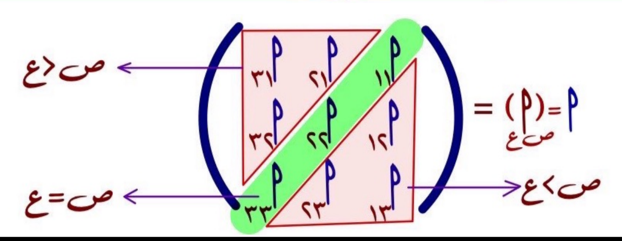
مثل I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ٢ × ٢

مثل I = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ ٣ × ٣

ملاحظه

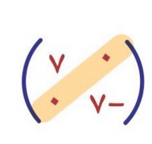
كل مصفوفة وحدة هي مصفوفة قطرية
وليست كل مصفوفة قطرية مصفوفة وحدة





المصفوفة المتماثلة والمصفوفة الشبه متماثلة

الشبه متماثلة	المتماثلة
مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسي اصفار	مصفوفة مربعة
$أ = -أ^{مد}$ ← $أ + أ^{مد} =$ [ ]	$أ = أ^{مد}$ ← $أ - أ^{مد} =$ [ ]
العناصر المتناظرة حول القطر الرئيسي معكوسات جمعية	العناصر المتناظرة حول القطر الرئيسي متساوية
$أ_{٢١} = -أ_{١٢}$ ، $أ_{٣٢} = -أ_{٢٣}$ ، $أ_{١٣} = -أ_{٣١}$	$أ_{٢١} = أ_{١٢}$ ، $أ_{٣٢} = أ_{٢٣}$ ، $أ_{١٣} = أ_{٣١}$



$\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٧ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٤ & -١ \\ ٦ & -١ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ & -٤ \\ ٣ & ٠ & ٥ \\ ٤ & -٥ & ٠ \end{pmatrix}$

ضرب مصفوفتين

شرط ضرب مصفوفتين

عدد أعمدة الاولي = عدد صفوف الثانيه

أ × ب
م×ن ن×هـ
الشرط
نظم المصفوفة الجديدة

المحددات

فك محدد الرتبة الثانية

$\Delta = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ ب & د \end{vmatrix} = أ \times د - جـ \times ب$ = ضرب عناصر القطر الرئيسي - ضرب عناصر القطر الفرعي

القطر الفرعي
القطر الرئيسي

فك محدد الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\text{فك } \triangle = \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & \text{ج} \\ \text{د} & \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} = \text{أ} \begin{vmatrix} \text{هـ} & \text{و} \\ \text{ح} & \text{ط} \end{vmatrix} - \text{ب} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{و} \\ \text{ز} & \text{ط} \end{vmatrix} + \text{ج} \begin{vmatrix} \text{د} & \text{هـ} \\ \text{ز} & \text{ح} \end{vmatrix}$$

$$= \text{أ}(\text{هـ ط} - \text{ح و}) - \text{ب}(\text{د ط} - \text{ز و}) + \text{ج}(\text{د ح} - \text{ز هـ})$$



١ إذا كان أ مصفوفة على النظم ن × ن ، ك $\in$ ح فإن |ك أ| = $\text{ك}^{\text{ن}}$ |أ|

فمثلاً

- إذا كان أ مصفوفة على النظم ٢ × ٢ وكان |أ| = ٣
  فإن |٤ أ| = $٤^{٢}$ |أ| = ١٦ × ٣ = ٤٨
- إذا كان أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ وكان |أ| = ١٠
  فإن |٢ أ| = $٢^{٣}$ |أ| = ٨ × ١٠ = ٨٠

٢ إذا كان أ مصفوفة مربعة فإن |أ| = $|\text{أ}^{\text{مد}}|$

إيجاد مساحة سطح المثلث بالمحددات

يمكن إستخدام المحددات لإيجاد مساحة سطح المثلث بمعلومية إحداثيات رؤوس المثلث كالآتى :

مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه أ $(س_١ ، ص_١)$ ، ب $(س_٢ ، ص_٢)$ ، ج $(س_٣ ، ص_٣)$

هى قيمة م الموجبة حيث $|م| = \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} س_١ & ص_١ & ١ \\ س_٢ & ص_٢ & ١ \\ س_٣ & ص_٣ & ١ \end{vmatrix}$ وحدة مربعة

ملاحظه إذاكانت قيمة المحدد تساوي صفر

حل نظام المعادلات الخطية بطريقة كرامر

لحل معادلتين في مجهولين

أ س + ب ص = جـ ، د س + هـ ص = و نتبع الآتي

$\Delta_{\text{المعاملات}} = \begin{vmatrix} أ & ب \\ د & هـ \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} جـ & ب \\ و & هـ \end{vmatrix}$ ، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} أ & جـ \\ د & و \end{vmatrix}$

وتكون مجموعة الحل (س ، ص) = $\{(\frac{\Delta_{س}}{\Delta} ، \frac{\Delta_{ص}}{\Delta})\}$

طريقة إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة

إذا كان للمصفوفة أ معكوسًا ضربيًا فإننا نرمز إليه بالرمز $أ^{-1}$ حيث $أ أ^{-1} = أ^{-1} أ = I$

وكانت $أ = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ ومحدد أ = Δ ≠ ٠ فإن $أ^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} د & -ب \\ -جـ & أ \end{pmatrix}$



- المعكوس الضربى للمصفوفة يكون معرفًا (موجودًا) عندما يكون محدد أ = Δ ≠ ٠
- بعض المصفوفات ليس لها معكوسًا ضربيًا (إذا كان Δ = ٠)

حل معادلتين خطيتين بإستخدام معكوس المصفوفة

أ س = ع ويكون حل المعادلة هو س = $أ^{-1}$ ع

حيث أ هى مصفوفة المعاملات ومحددها ≠ ٠ ، س هى مصفوفة المجاهيل ، ع هى مصفوفة الثوابت

المتطابقات المثلثية

ثلاث مجموعات

① مجموعة المقلوبات

جا $\theta = \frac{1}{\text{قتا } \theta}$ ، جتا $\theta = \frac{1}{\text{قا } \theta}$ ، ظا $\theta = \frac{1}{\text{ظتا } \theta}$

قتا $\theta = \frac{1}{\text{جا } \theta}$ ، قا $\theta = \frac{1}{\text{جتا } \theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{1}{\text{ظا } \theta}$

ومنها: جا θ قتا θ = ١ ، جتا θ قا θ = ١ ، ظا θ ظتا θ = ١

② مجموعة ظا ، ظتا

ظا $\theta = \frac{\text{جا } \theta}{\text{جتا } \theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$

③ مجموعة التربيعات

جتا$^2 \theta$ + جا$^2 \theta$ = ١ — الزعيم

ومنهم:

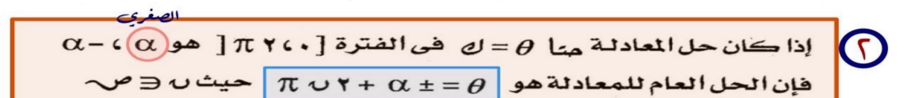
جا$^2 \theta$ + جتا$^2 \theta$ = ١ ⟸ جا$^2 \theta$ = ١ − جتا$^2 \theta$ ، جتا$^2 \theta$ = ١ − جا$^2 \theta$

ظا$^2 \theta$ + ١ = قا$^2 \theta$ ⟸ ظا$^2 \theta$ = قا$^2 \theta$ − ١ ، قا$^2 \theta$ − ظا$^2 \theta$ = ١

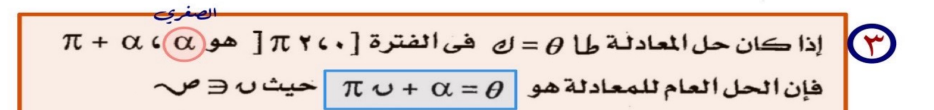
ظتا$^2 \theta$ + ١ = قتا$^2 \theta$ ⟸ ظتا$^2 \theta$ = قتا$^2 \theta$ − ١ ، قتا$^2 \theta$ − ظتا$^2 \theta$ = ١

ثانيًا : الحل العام

① إذا كان حل المعادلة جا θ = ك في الفترة [٠ ، ٢π[هو α ، β
فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \alpha + ٢ن\pi$ أو $\beta + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص



② إذا كان حل المعادلة جتا θ = ك في الفترة [٠ ، ٢π[هو α (الصغرى) ، $-\alpha$
فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \pm\alpha + ٢ن\pi$ حيث ن ∈ ص



③ إذا كان حل المعادلة ظا θ = ك في الفترة [٠ ، ٢π[هو α (الصغرى) ، $\alpha + \pi$
فإن الحل العام للمعادلة هو $\theta = \alpha + ن\pi$ حيث ن ∈ ص

ملاحظة الحل العام لمعادلات الزوايا الربعية :

المعادلة	حلها العام	المعادلة	حلها العام
جا $\theta = 0$	$\theta = \pi$ ن	جتا $\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2} + \pi$ ن
جا $\theta = 1$	$\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن	جتا $\theta = 1$	$\theta = 2\pi$ ن
جا $\theta = -1$	$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi$ ن	جتا $\theta = -1$	$\theta = \pi + 2\pi$ ن

حل المثلث القائم

يقصد بحل المثلث : إيجاد العناصر المجهولة .



١ $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = جا ج

٢ $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = جتا ج

٣ $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = ظا ج

أ
الوتر
المقابل
ج
المجاور
ب

الحالة الأولى عند معلومية طول ضلع وقياس زاوية

نستخدم

$\frac{\text{المجهول}}{\text{المعلوم}}$ = نسبة مثلثية لزاوية معلومة

الحالة الثانية عند معلومية طولا ضلعين فيه

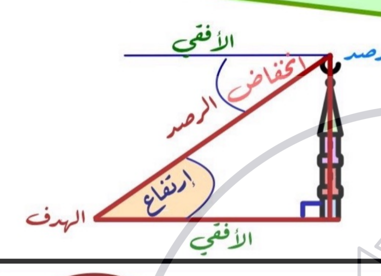
نستخدم

$\frac{\text{المعلوم}}{\text{المعلوم}}$ = نسبة مثلثية لزاوية مجهولة

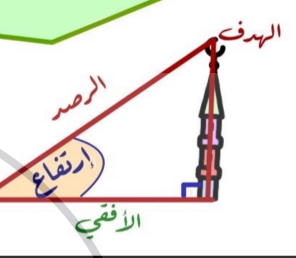
تطبيقات علي حل المثلث

زوايا الارتفاع والانخفاض

تعريف : زاوية الارتفاع والانخفاض هي الزاوية المحصورة بين الشعاع الافقي وشعاع الرصد عند نقطة الرصد







القطاع الدائري

القطاع الدائرى هو جزء من سطح دائرة محدود بقوس فيها وبنصفي القطرين المارين بطرفي هذا القوس.

قطاع أكبر، م، نق، نق، θ°، قطاع أصغر، ب، ا، ل

مساحة القطاع

١) مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2}\,\theta^{د}\,نق^2$ $= \frac{س^{\circ}}{360^{\circ}} \times \pi\,نق^2$

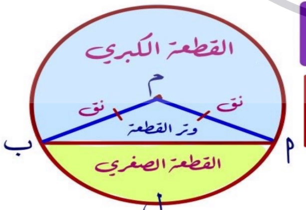
٢) مساحة القطاع الدائرى $= \frac{1}{2}\,ل\,نق$

- نق نصف قطر الدائرة
- ل طول القوس القطاع
- θ° الزاوية المركزية للقطاع

محيط القطاع

محيط القطاع الدائرى = ٢ نق + ل

القطعة الدائرية



مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2}\,نق^2\,(\theta^{د} - \text{جا}\,\theta)$

ملاحظات هاااامه

١) إذا كان المطلوب مساحة القطعة الكبرى ا ء ب فإن ق (∠ا م ب) المنعكسة هو قياس زاوية القطعة الكبرى وقوسها هو ا ء ب

٢) يمكن إيجاد مساحة القطعة الكبرى بطرح مساحة القطعة الصغرى من مساحة الدائرة.

٣) محيط القطعة الدائرية = طول قوسها + طول وترها.

المساحات

① مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع المناظر لها

② مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي ضلعين فيه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

③ مساحة المثلث أ ب حـ = $\sqrt{ع (ع - أ ب) (ع - ب حـ) (ع - أ حـ)}$

قاعدة هيرو — حيث ع نصف محيط المثلث

④ مساحة الشكل الرباعي = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

⑤ مساحة المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطره = طول الضلع X نفسه

⑥ مساحة المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي قطريه

⑦ مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعًا وطول ضلعه س = $\frac{1}{4}$ ن س^{2} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

⑧ مساحة المثلث المتساوى الأضلاع = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^{2} حيث س طول ضلع المثلث

⑨ مساحة السداسى المنتظم = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ س^{2} حيث س طول ضلعه

المتجهات

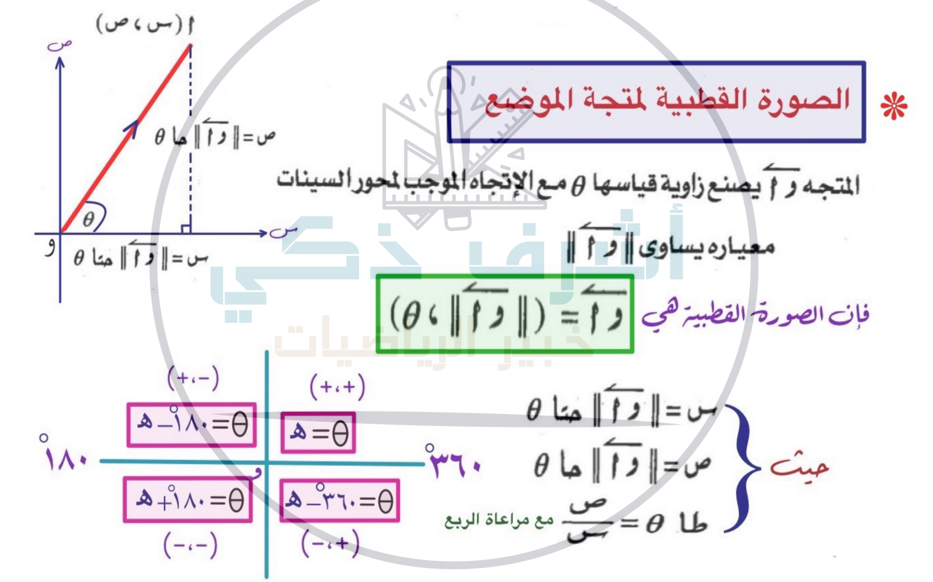
* متجة الموضع

هو المتجة الذي بداية نقطة الأصل (و) ونهايته أي نقطة في المستوي الإحداثي المتعامد ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{و أ}} = \overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س}، \text{ص})$

* معيار متجة الموضع

هو طول القطعة المستقيمة الممثلة للمتجه فإذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ فإن معيار (طول) المتجه $\overleftarrow{\text{أ}}$ يرمز له بالرمز $\| \overleftarrow{\text{أ}} \|$ حيث $\| \overleftarrow{\text{أ}} \| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

فمثلًا
- إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (-٣ ، ٤)$ فإن $\| \overleftarrow{\text{أ}} \| = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$ وحدة طول
- وإذا كان $\overleftarrow{\text{ب}} = (٢ ، ٣)$ فإن $\| \overleftarrow{\text{ب}} \| = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ وحدة طول



* الصورة القطبية لمتجة الموضع

المتجه $\overleftarrow{\text{و أ}}$ يصنع زاوية قياسها θ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

معياره يساوى $\| \overleftarrow{\text{و أ}} \|$

فإن الصورة القطبية هي $\overleftarrow{\text{و أ}} = (\| \overleftarrow{\text{و أ}} \| ، \theta)$

حيث
- $\text{س} = \| \overleftarrow{\text{و أ}} \| \text{ جتا } \theta$
- $\text{ص} = \| \overleftarrow{\text{و أ}} \| \text{ جا } \theta$
- $\text{ظا } \theta = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ مع مراعاة الربع

وتكون الصورة الإحداثية $\overleftarrow{\text{و أ}} = (\| \overleftarrow{\text{و أ}} \| \text{ جتا } \theta ، \| \overleftarrow{\text{و أ}} \| \text{ جا } \theta)$

* التعبير عن المتجة بدلالة متجهي الوحدة الأساسين

إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص})$ متجه فى المستوى فإنه يمكن التعبير عنه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين كما يلى :

$$\overleftarrow{\text{أ}} = (\text{س} ، \text{ص}) = \text{س} \ \overleftarrow{\text{س}} + \text{ص} \ \overleftarrow{\text{ص}}$$

* متجة الوحدة

أى متجه معياره الواحد الصحيح يسمى متجه الوحدة

$\overrightarrow{\text{س}} = (1 ، 0)$ متجه وحدة لأن $\|\overrightarrow{\text{س}}\| = \sqrt{1 + 0} = 1$ وحدة طول

$\overrightarrow{\text{ص}} = (0 ، 1)$ متجه وحدة لأن $\|\overrightarrow{\text{ص}}\| = \sqrt{0 + 1} = 1$ وحدة طول



شرط توازي وتعامد متجهين

لكل $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متجهين غير صفريين حيث : $\overrightarrow{\text{أ}} = (\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، $\overrightarrow{\text{ب}} = (\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \parallel \overrightarrow{\text{ب}}$	إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$
$\text{س}_1\text{ص}_2 - \text{س}_2\text{ص}_1 = 0$	$\text{س}_1\text{س}_2 + \text{ص}_1\text{ص}_2 = 0$
والعكس صحيح.	والعكس صحيح.

* قواعد جمع المتجهات هندسياً

قاعدة غلق المثلث (علاقة شال)

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

ملاحظه

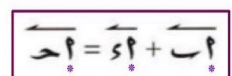
١) $\overrightarrow{\text{أب}} = -\overrightarrow{\text{با}}$ حيث إن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{با}} = \overrightarrow{\text{و}}$ «المتجه الصفرى»

٢) فى أى مثلث أ ب جـ يكون : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{جأ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

٣) فى أى شكل رباعى يكون :

$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{جد}} = \overrightarrow{\text{أد}}$

قاعدة متوازي الأضلاع

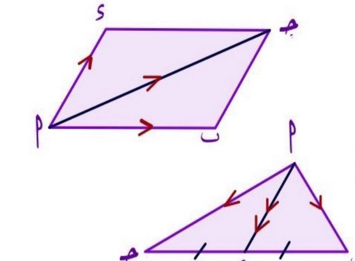


$\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أد}} = \overrightarrow{\text{أج}}$

قاعدة متوسط المثلث

إذا كان : $\overline{\text{أد}}$ متوسطاً فى Δ أ ب جـ

فإن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أج}} = 2\,\overrightarrow{\text{أد}}$



* **قاعدة طرح متجهين هندسياً**

$\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـب}$

التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها

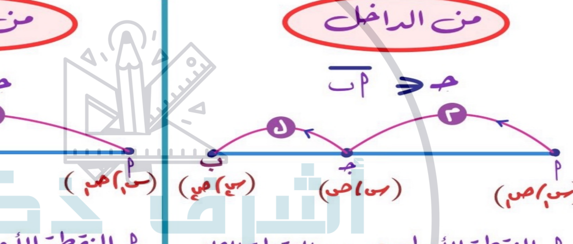
إذا كانت : أ $(س_1 ، ص_1)$ ، ب $(س_2 ، ص_2)$ **فإن :** $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وب} - \overrightarrow{وأ}$

حيث $\overrightarrow{وب}$ ، $\overrightarrow{وأ}$ متجها موضع للنقطتين ب ، أ على الترتيب.

∴ $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ المتجه = النهاية − البداية

* **قوانين تقسيم قطعة مستقيمة**

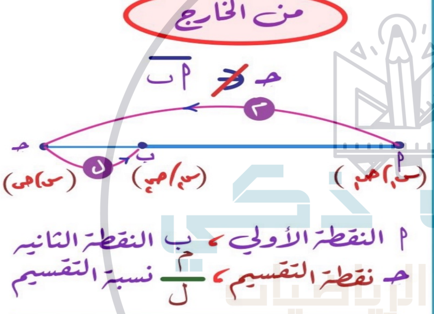
من الداخل



أ النقطة الأولى ، ب النقطة الثانية
جـ نقطة التقسيم ، $\frac{م}{ل}$ نسبة التقسيم

$$جـ = \left(\frac{م س_2 + ل س_1}{م + ل} ، \frac{م ص_2 + ل ص_1}{م + ل} \right)$$

من الخارج



أ النقطة الأولى ، ب النقطة الثانية
جـ نقطة التقسيم ، $\frac{م}{ل}$ نسبة التقسيم

$$جـ = \left(\frac{م س_2 - ل س_1}{م - ل} ، \frac{م ص_2 - ل ص_1}{م - ل} \right)$$

ملاحظات

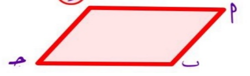
① إحداثى جـ منتصف أب $جـ = \frac{أ + ب}{2}$ $= \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{2} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{2} \right)$

② إحداثى م نقطة تلاقي متوسطات المثلث أ ب جـ

$م = \frac{أ + ب + جـ}{3}$ $= \left(\frac{\text{مجموع السينات}}{3} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{3} \right)$

③ إحداثى الرأس ء في متوازي الاضلاع أ ب جـ ء

$ء = أ + جـ - ب$



ونفس الطريقة نوجد اى رأس غائب

معادلة الخط المستقيم

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم

المستقيم ل الذى يمر بالنقطة و = (س$_١$ ، ص$_١$) والمتجه $\overrightarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه له تكون :

❶ المعادلة المتجهة هى : $\overrightarrow{ر} = \overrightarrow{و} + ك\,\overrightarrow{ى}$

أى أن (س ، ص) = (س$_١$ ، ص$_١$) + ك (أ ، ب)

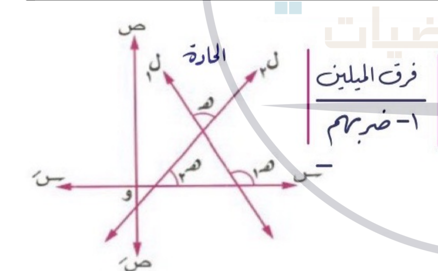
❷ المعادلتان الوسيطيتان هما :
س = س$_١$ + ك أ
ص = ص$_١$ + ك ب

❸ المعادلة الكارتيزية هى : $\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = م = \frac{ب}{أ}$ حيث (أ ، ب) متجه الاتجاه للمستقيم

قانون قياس الزاوية بين مستقيمين

ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|$ = $\left|\frac{\text{فرق الميلين}}{\text{١ + ضربهم}}\right|$

حيث : هـ ∈ $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، م$_١$ = ظا هـ$_١$ ، م$_٢$ = ظا هـ$_٢$



قانون طول العمود الساقط من نقطة علي مستقيم

إذا كانت النقطة (س$_١$ ، ص$_١$) لا تنتمى للمستقيم الذى معادلته أ س + ب ص + جـ = ٠ فإن طول العمود (ل) المرسوم من هذه النقطة إلى المستقيم يتحدد من العلاقة

$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$ وحدة

(س$_١$ ، ص$_١$)
ل
أ س + ب ص + جـ = ٠